$\boxed{1}$

(1)

$\boxed{ア}$

$\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

解説

$$\sin\frac{5}{12}\pi = \sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4}$$
$$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

$\boxed{イ}$

$\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

解説

$$\cos\frac{5}{12}\pi = \cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4}$$
$$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

(2)

$\boxed{\text{ウ}}\dfrac{1}{2}$　$\boxed{\text{エ}}\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

解説

$B=\alpha+\beta$， $C=\alpha-\beta$ とおくと，

$$x=\sin B+\sin C$$
$$=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$$
$$=2\sin\alpha\cos\beta$$

$\alpha=\dfrac{B+C}{2}$， $\beta=\dfrac{B-C}{2}$ より，

$$\therefore x=2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} \quad ・・・①$$

$A=\dfrac{\pi}{6}$， $A+B+C=\pi$ より，

$$\frac{B+C}{2}=\frac{\pi-A}{2}=\frac{\pi-\frac{\pi}{6}}{2}=\frac{\frac{5}{6}\pi}{2}=\frac{5}{12}\pi \quad ・・・②$$

①，②より，

$$x=2\sin\frac{5}{12}\pi\cos\frac{B-C}{2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

ここで，

$$\frac{B-C}{2}=\frac{B-\left(\frac{5}{6}\pi-B\right)}{2}=B-\frac{5}{12}\pi$$

$B\geq C$， $B+C=\dfrac{5}{6}\pi$ より， $\dfrac{5}{12}\pi\leq B<\dfrac{5}{6}\pi$

よって，

$$0\leq\frac{B-C}{2}<\frac{5}{12}\pi$$

$$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}<\cos\frac{B-C}{2}\leq 1$$

よって，

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}<\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\cos\frac{B-C}{2}\leq\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\cdot 1$$

$$\therefore \frac{1}{2}<x\leq\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$$

(3)

$\boxed{オ}$ 0　$\boxed{カ}$ $\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$

解説

$$
\begin{aligned}
y &= \sin B \sin C \\
&= \frac{1}{2}\{\cos(B-C)-\cos(B+C)\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\cos(B-C)-\cos\frac{5}{6}\pi\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\cos(B-C)+\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}
\end{aligned}
$$

ここで，

$B \geq C$，　$B+C=\dfrac{5}{6}\pi$ より，　$0 \leq B-C < \dfrac{5}{6}\pi$

$$\therefore -\frac{\sqrt{3}}{2} < \cos(B-C) \leq 1$$

よって，

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) < \frac{1}{2}\left\{\cos(B-C)+\frac{\sqrt{3}}{2}\right\} \leq \frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\therefore 0 < y \leq \frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

補足

$B \geq C$，　$B+C=\dfrac{5}{6}\pi$ より，　$\dfrac{5}{12}\pi \leq B < \dfrac{5}{6}\pi$ について

座標平面上に $B \geq C$ かつ $B=-C+\dfrac{5}{6}\pi$ のグラフを描き求めてもよい。

(4)

$\boxed{キ}$

$\frac{7}{12}\pi$

解説

$\Delta\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\mathrm{BA}\cdot\mathrm{BC}\cdot\sin B=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot 1\cdot\sin B=\frac{\mathrm{AB}\sin B}{2}$ ・・・①

正弦定理より，$\frac{\mathrm{BC}}{\sin\mathrm{A}}=\frac{\mathrm{AB}}{\sin\mathrm{C}}$

$\therefore \mathrm{AB}=\frac{\mathrm{BC}}{\sin A}\cdot\sin C=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{6}}\cdot\sin C=2\sin C$ ・・・②

①，②より，

$\Delta\mathrm{ABC}=\sin B\sin C$

よって，

$\sin B\sin C=\frac{\sqrt{3}+1}{4}$

(3)より，

$\sin B\sin C=\frac{1}{2}\left\{\cos(B-C)+\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$ だから，

$\frac{1}{2}\left\{\cos(B-C)+\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}=\frac{\sqrt{3}+1}{4}$

$\cos(B-C)=\frac{1}{2}$

$\therefore B-C=\frac{\pi}{3}$

これと $B+C=\frac{5}{6}\pi$ より，

$B=\frac{7}{12}\pi$

$\boxed{2}$

(1)

$\vec{a}\cdot\vec{a}=4$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\dfrac{\pi}{3}=2$

$\vec{a}\cdot\vec{c}=|\vec{a}|\cdot|\vec{c}|\cos\dfrac{\pi}{3}=2$

(2)

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OG}}&=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{OE}}+\overrightarrow{\mathrm{OF}}\right)\\
&=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}\right)\\
&=\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{2}{9}\vec{c}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left|\overrightarrow{\mathrm{OG}}\right|^2&=\left(\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{2}{9}\vec{c}\right)^2\\
&=\left(\frac{3\vec{a}+3\vec{b}+4\vec{c}}{18}\right)^2\\
&=\frac{1}{18^2}\left(9\vec{a}\cdot\vec{a}+9\vec{b}\cdot\vec{b}+16\vec{c}\cdot\vec{c}+18\vec{a}\cdot\vec{b}+24\vec{b}\cdot\vec{c}+24\vec{c}\cdot\vec{a}\right)\\
&=\frac{1}{18^2}(36+36+64+36+48+48)\\
&=\frac{67}{81}
\end{aligned}
$$

$$\therefore\left|\overrightarrow{\mathrm{OG}}\right|=\frac{\sqrt{67}}{9}$$

(3)

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ とおくと，

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{k}{6}\vec{a}+\dfrac{k}{6}\vec{b}+\dfrac{2k}{9}\vec{c}$ ・・・①

また，点 P は平面 ABC 上の点より， $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおくと，

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$ ・・・②

$\vec{a}$， $\vec{b}$， $\vec{c}$ は同一平面上にないから，
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いると 1 通りにしか表せない。
よって，①，②より，

$1-s-t=\dfrac{k}{6}$， $s=\dfrac{k}{6}$， $t=\dfrac{2k}{9}$

$s=\dfrac{k}{6}$， $t=\dfrac{2k}{9}$ を $1-s-t=\dfrac{k}{6}$ に代入すると，

$1-\dfrac{k}{6}-\dfrac{2k}{9}=\dfrac{k}{6}$

$18-3k-4k=3k$

$10k=18$

$\therefore k=\dfrac{18}{10}$

これを①に代入すると，

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{3}{10}\vec{a}+\dfrac{3}{10}\vec{b}+\dfrac{2}{5}\vec{c}$

補足

任意の空間ベクトル $\vec{p}$ を 3 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の 1 次結合でただ 1 通りに表すことができるための必要十分条件は，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ が同一平面上に描けないことである。

(4)

DQ⊥OD かつ EQ⊥OD が成り立つとき，

3 点 D，E，F を通る平面と線分 OQ は垂直である。

よって，

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=l\vec{c}$ とおくと，

$\left(l\vec{c}-\dfrac{1}{2}\vec{a}\right)\cdot l\vec{c}=0$， $\left(l\vec{c}-\dfrac{1}{2}\vec{b}\right)\cdot l\vec{c}=0$

$4l^2-l=0$， $4l^2-l=0$

$l(4l-1)=0$

$l\neq 0$ より，

$4l-1=0$

$l=\dfrac{1}{4}$

よって，

$\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|=\dfrac{1}{4}\left|\vec{c}\right|=\dfrac{1}{2}$

3

(1)

$x^2-2x-8=(x+2)(x-4)$ より，

$x\le -2$， $4\le x$ のとき，

$$|x^2-2x-8|=x^2-2x-8$$

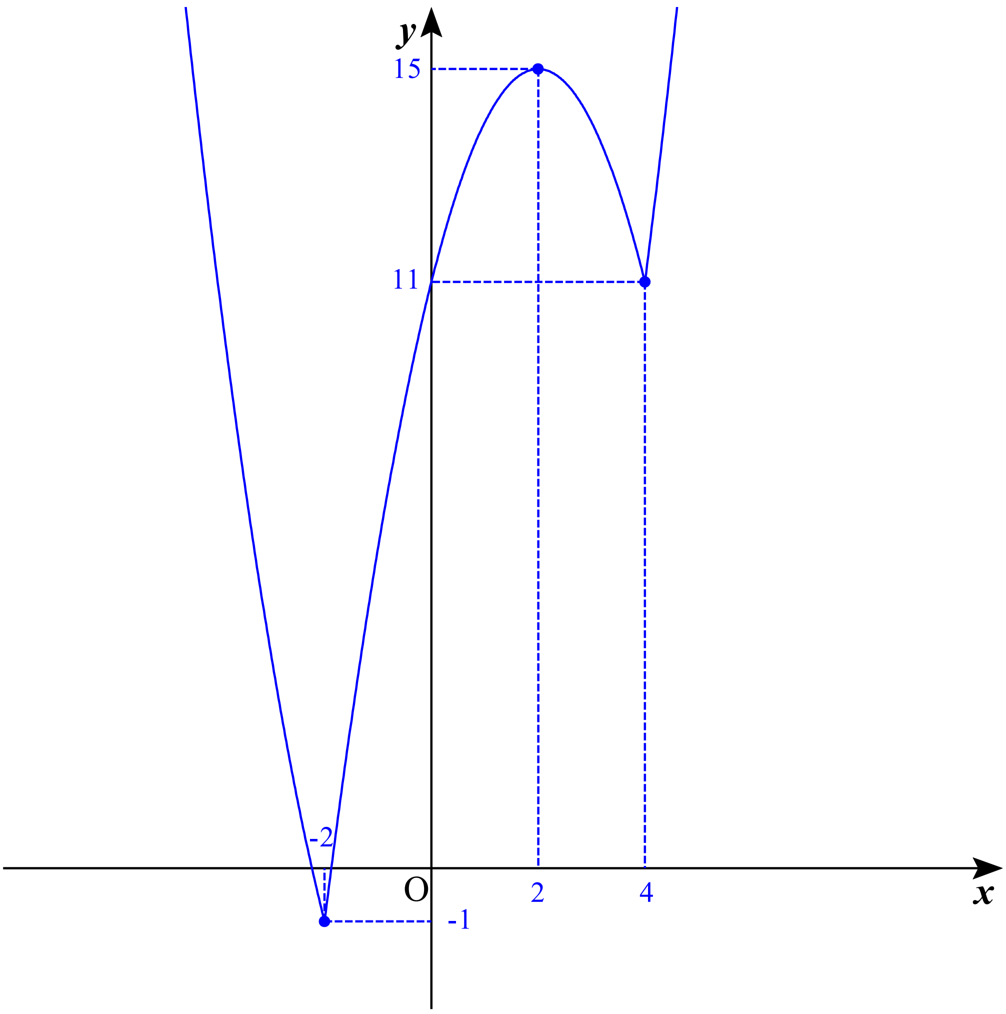
よって， $y=x^2-5$

$-2\le x\le 4$ のとき，

$$|x^2-2x-8|=-x^2+2x+8$$

よって， $y=-x^2+4x+11=-(x-2)^2+15$

以上より，グラフの概形は次図となる。



また，

直線 L： $y=kx+4k-5=k(x+4)-5$ より，

直線 L は k の値に関わらず定点 $\mathrm{P}(-4,-5)$ を通る。

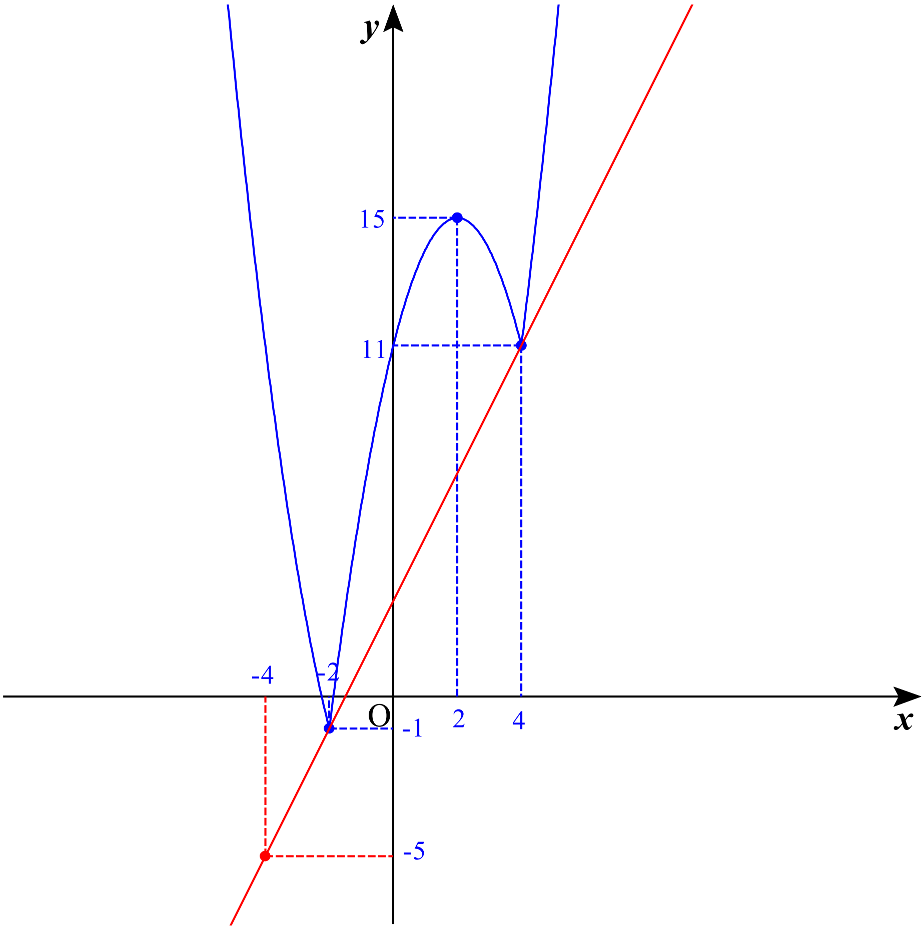
(2)

$y = kx + 4k - 5 = k(x+4) - 5$ （k は正の定数）

$k = 2$ のとき

直線 L は（4，11），（-2，-1）を通る。

よって，共有点は 2 個



また，これより，

$0 < k < 2$ のとき，共有点は 0 個

次に，

k を 2 より大きくしていくと，やがて $y = -x^2 + 4x + 11\ (-2 \le x \le 4)$ と接するから，

このときの k を求めることにする。

接点の x 座標は $kx + 4k - 5 = -x^2 + 4x + 11$，すなわち $x^2 + (k-4)x + 4k - 16 = 0$ の重解だから，

判別式を D とすると，重解条件より，

$D = (k-4)^2 - 16k + 64 = 0$

$k^2 - 24k + 80 = 0$

$(k-4)(k-20) = 0$

$k = 4$，20　・・・①

重解をαとおくと，

解と係数の関係より，

$\alpha = -k + 4$

$-2 \le \alpha \le 4$ より，

$-2 \le -k + 4 \le 4$

$0 \le k \le 6$　・・・②

①かつ②より，

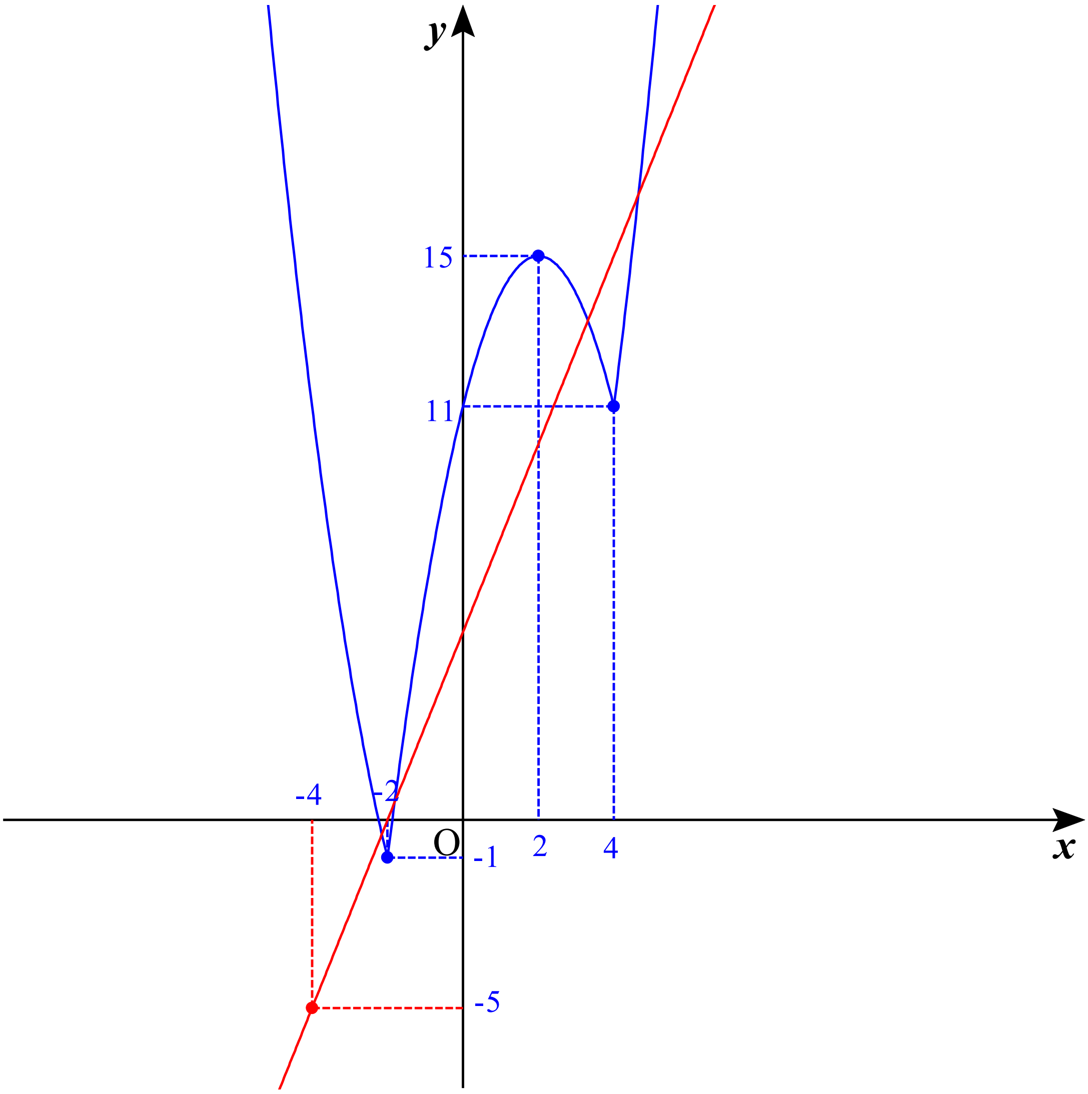
$k = 4$

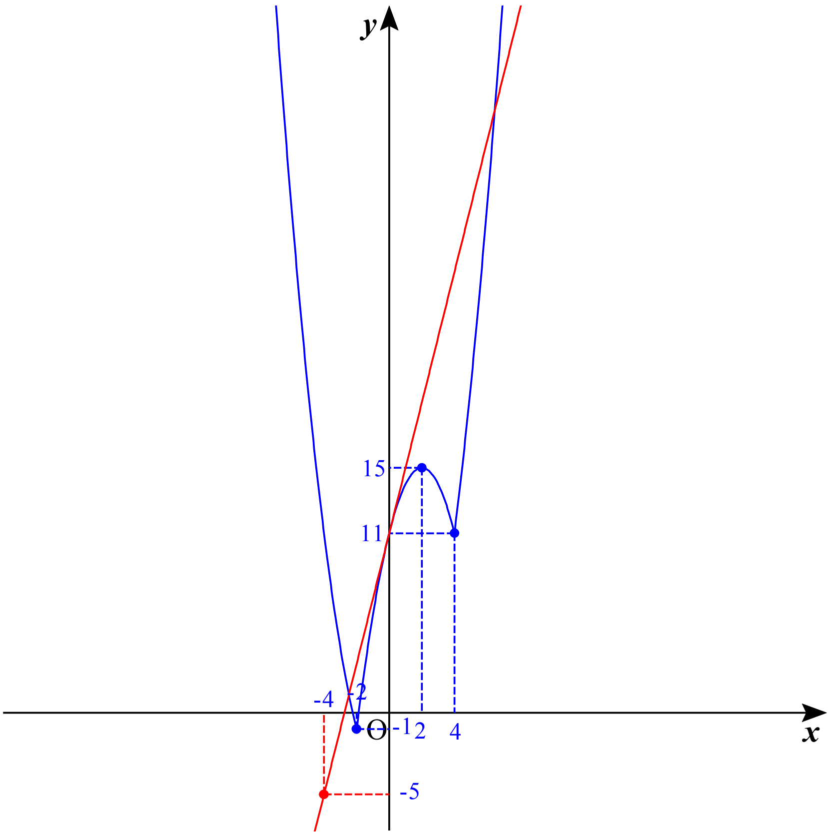
よって，

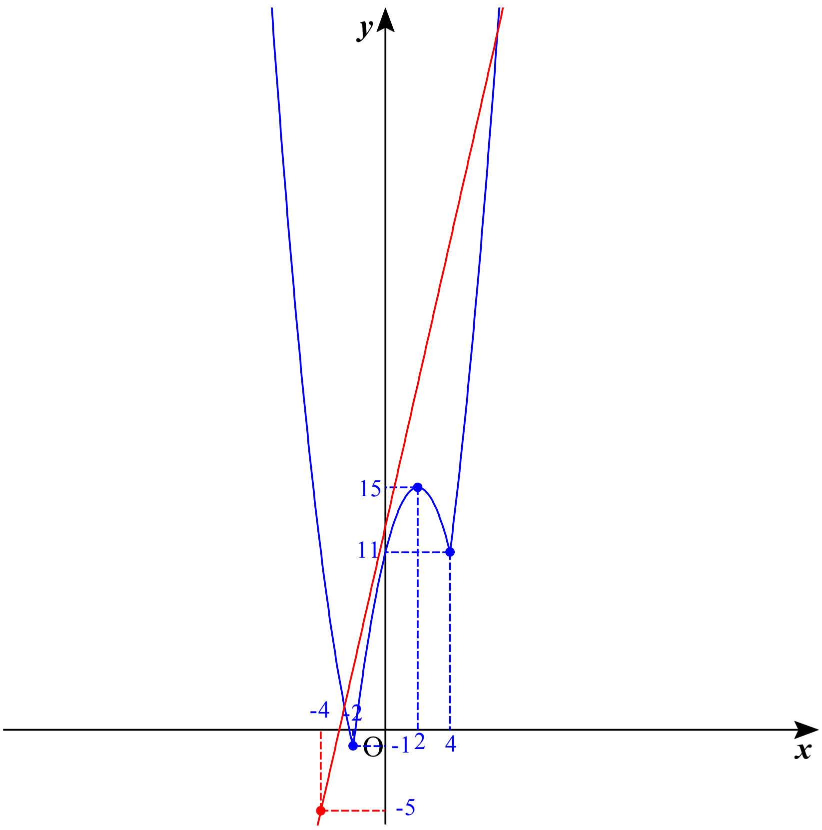
$2 < k < 4$ のとき，共有点は 4 個

$k = 4$ のとき，共有点は 3 個

$4 < k$ のとき，共有点は 2 個

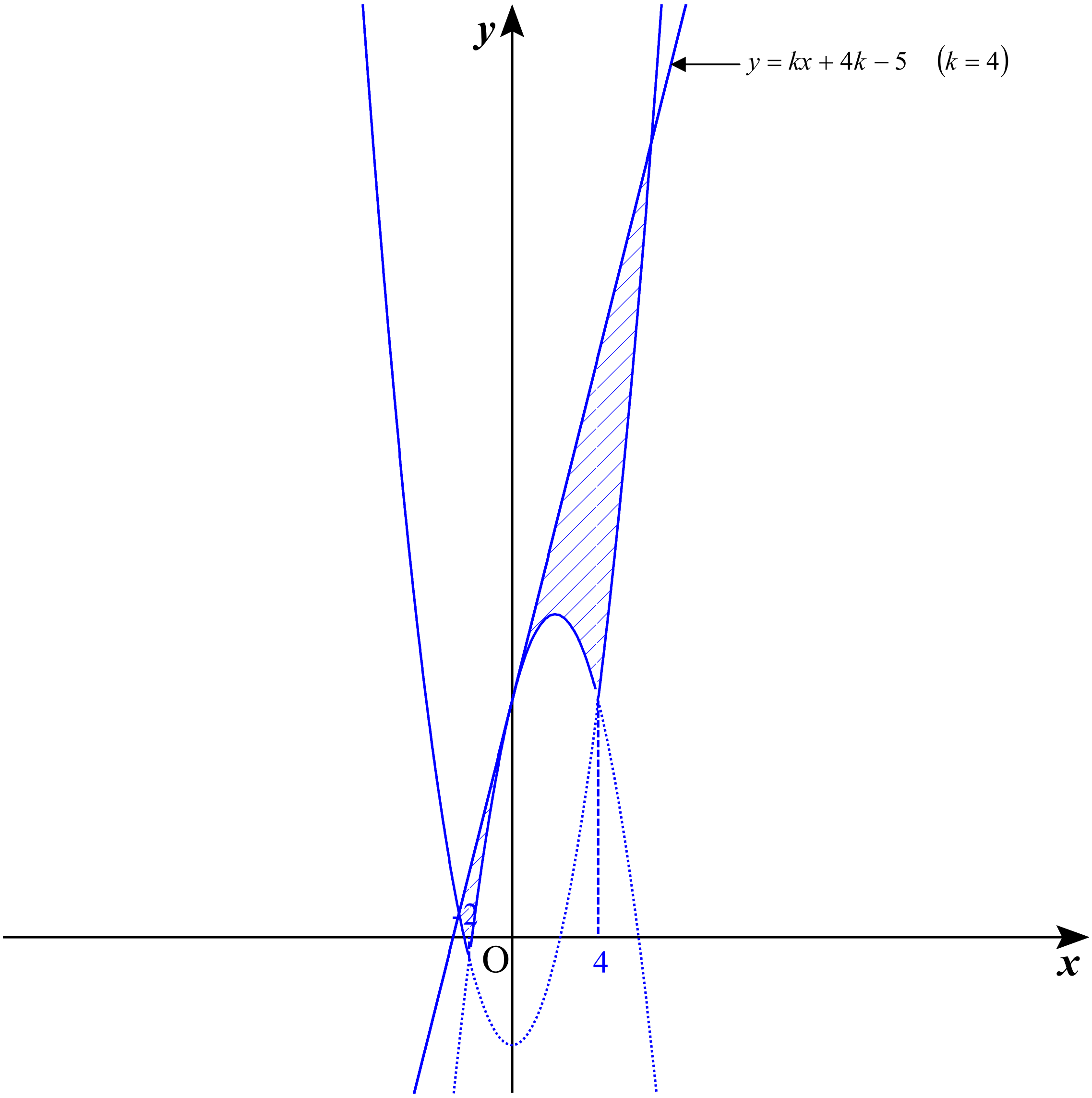



y
x
15
11
-4
-2
O
-1
2
4
-5

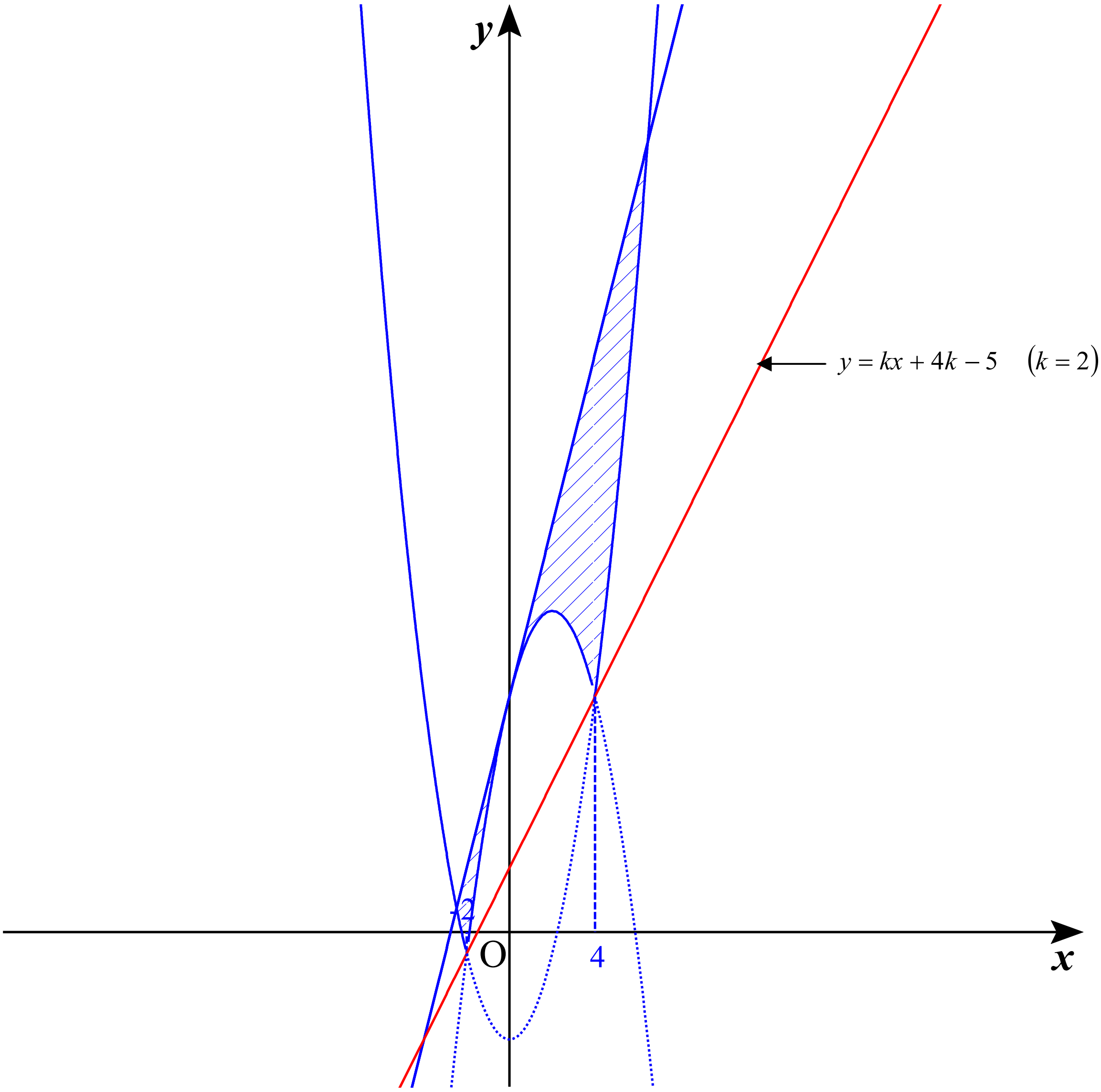

y
x
15
11
-4
-2
O
-1
2
4
-5

(3)

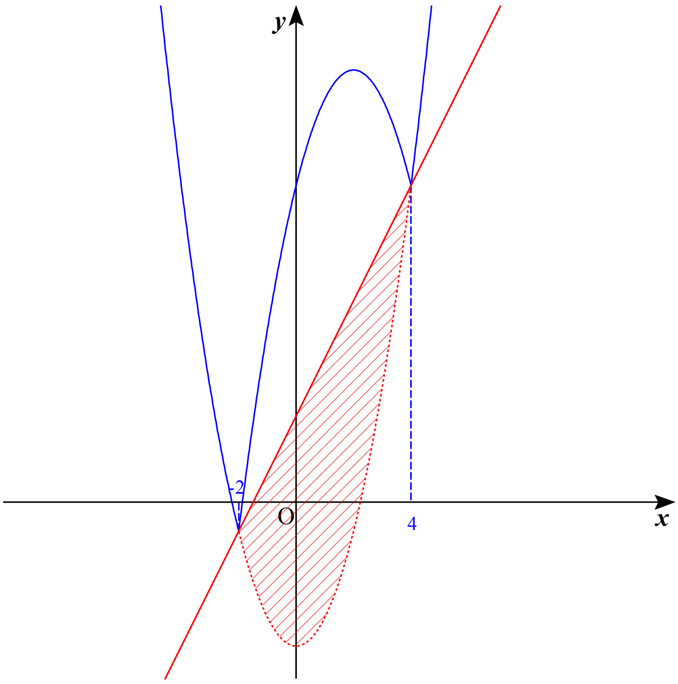
面積を求める領域は次図



この図に補助線 $y = kx + 4k - 5\ (k = 2)$ を書き込むと，

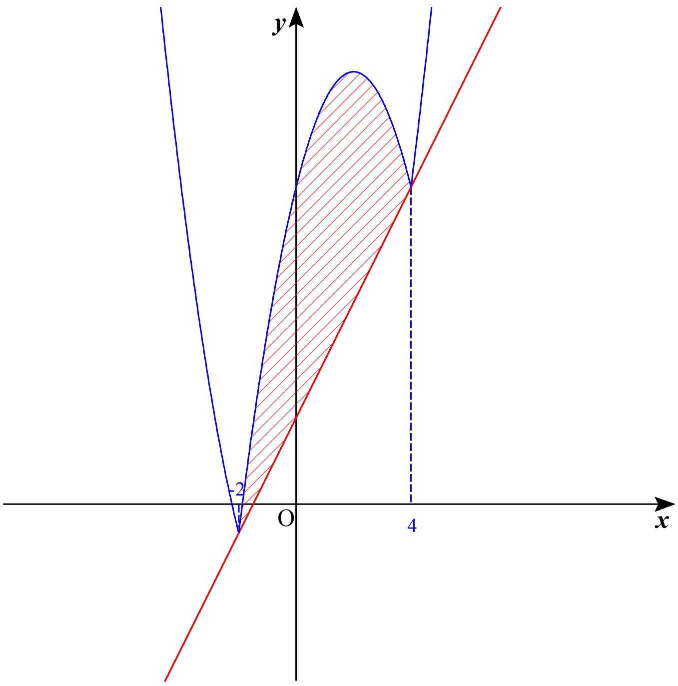


前図において，補助線 $y = kx + 4k - 5\ (k = 2)$ と $y = x^2 - 5$ で囲まれた部分の面積



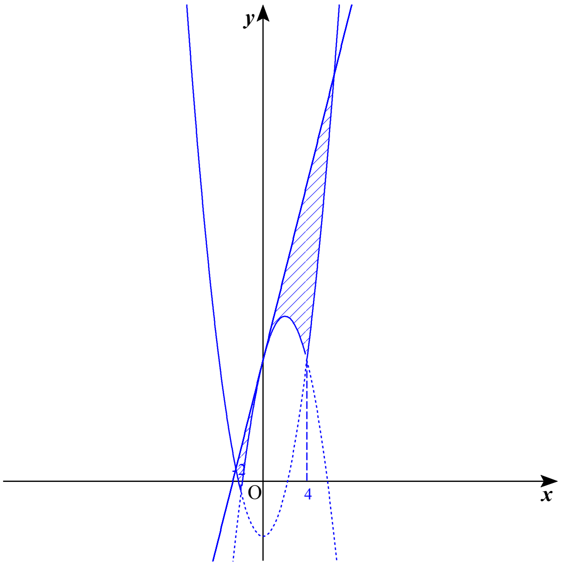
と

補助線 $y = kx + 4k - 5\ (k = 2)$ と $y = -x^2 + 4x + 11$ で囲まれた部分の面積

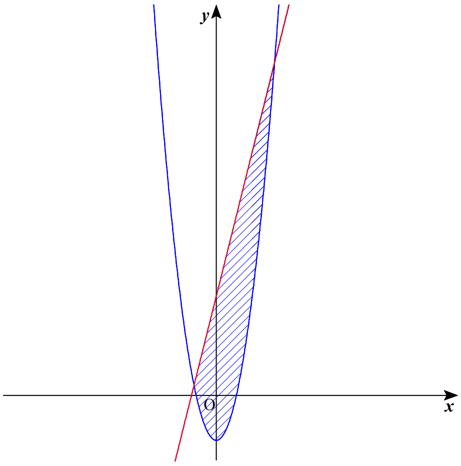


が等しいのは明らかである。

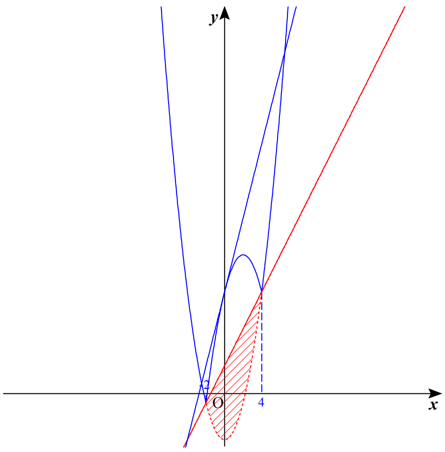
よって,



の面積は,

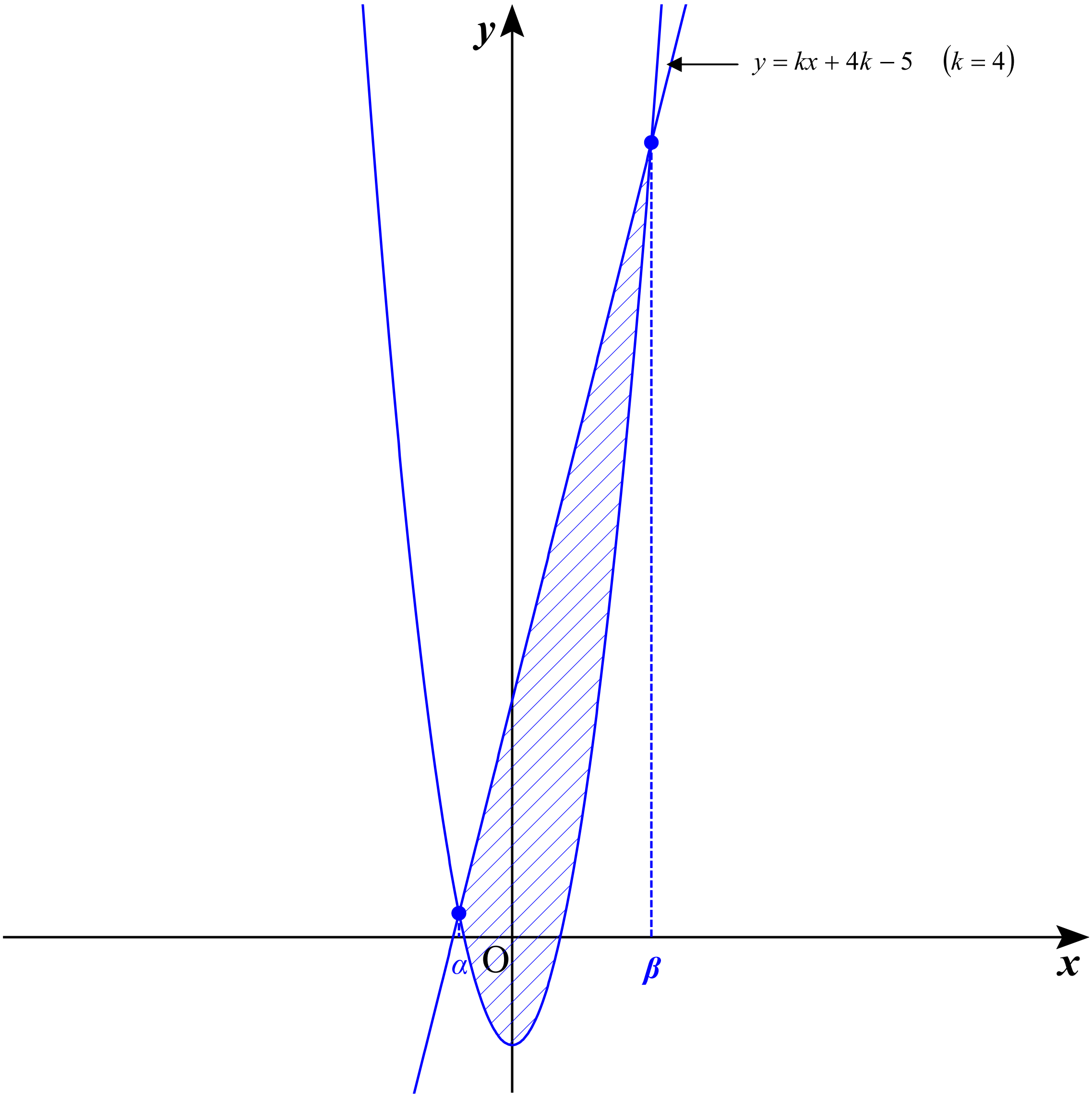


の面積から



の面積を 2 倍したものを引いた面積と等しい。

そこで，まず，



の面積を求めることにする。

$k=4$ のときの直線 L の式は，

$y=4x+11$

$y=x^2-5$ と $y=4x+11$ の交点の x 座標を α，β $(\beta>\alpha)$ とし，

$y=x^2-5$ と $y=4x+11$ で囲まれた部分の面積を S_1 とすると，

$$S_1=-\int_\alpha^\beta\left\{x^2-5-(4x+11)\right\}dx=\frac{(\beta-\alpha)^3}{6}$$

ここで，

α，β は，2 次方程式 $x^2-5=4x+11$，すなわち $x^2-4x-16=0$ の解だから，

解の公式より，$\alpha=2-2\sqrt{5}$，$\beta=2+2\sqrt{5}$ $\therefore \beta-\alpha=4\sqrt{5}$

（あるいは，解と係数の関係より，

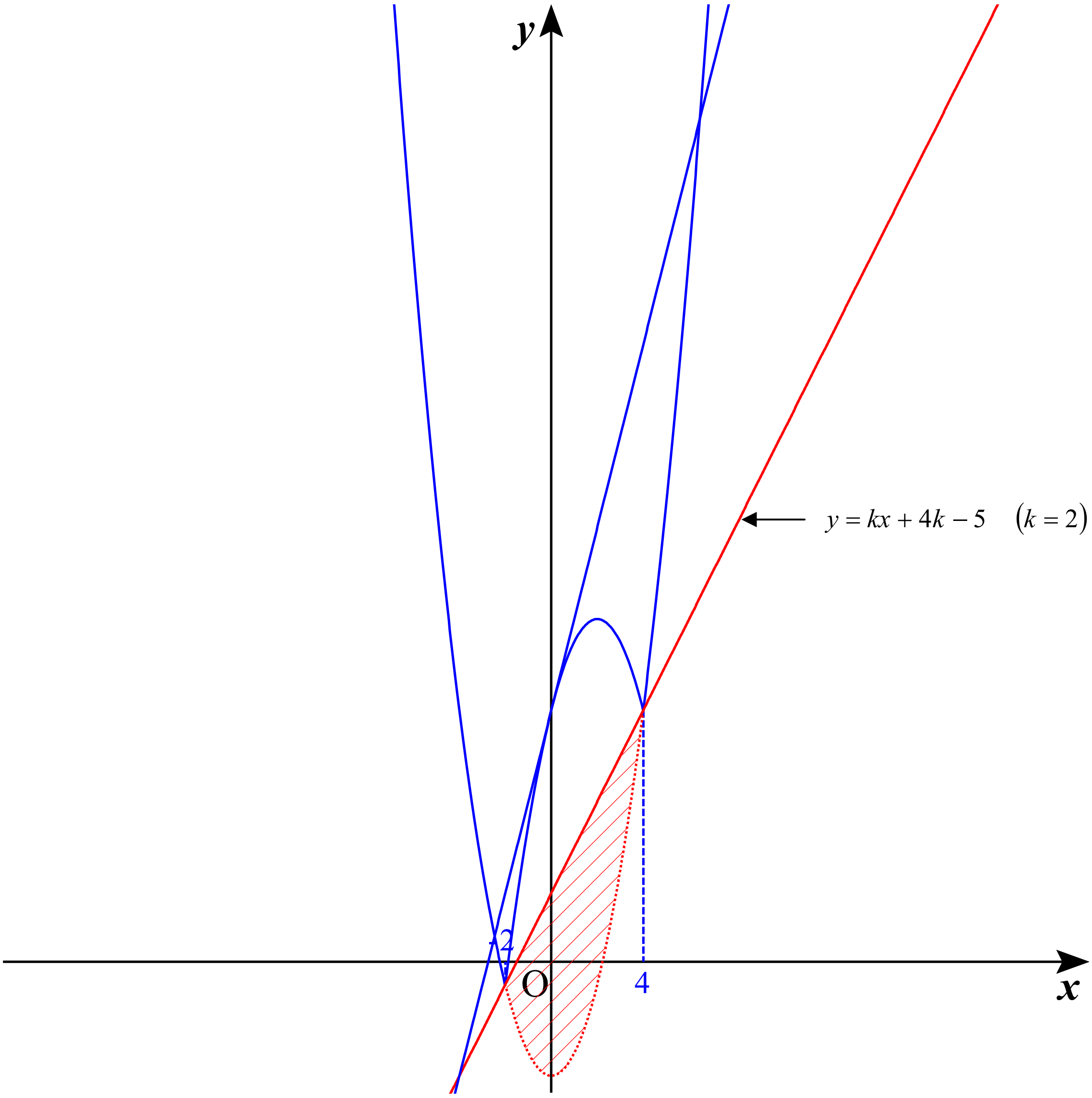
$\alpha+\beta=4$，$\alpha\beta=-16$

$\beta-\alpha=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{16+64}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$）

よって，

$$S_1=\frac{\left(4\sqrt{5}\right)^3}{6}=\frac{160\sqrt{5}}{3} \quad ・・・③$$

続いて，



の面積を求める。

$k = 2$ のときの直線 L の式は，

$y = 2x + 3$

$y = x^2 - 5$ と $y = 2x + 3$ で囲まれた部分の面積を S_2 とすると，

$$S_2 = -\int_{-2}^{4} \{x^2 - 5 - (2x + 3)\} dx = \frac{\{4 - (-2)\}^3}{6} = 36$$

以上より，
曲線 C と直線 L で囲まれた部分の面積を S とすると，

$$S = S_1 - 2S_2 = \frac{160\sqrt{5}}{6} - 72$$